

# خواص فیزیکی الیاف

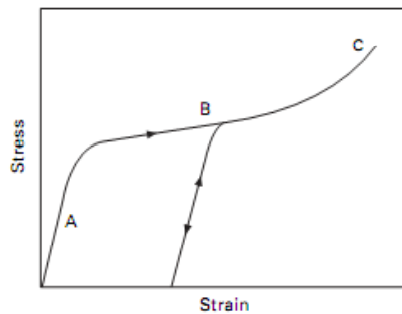
## تئوری های خواص مکانیکی

### Theories of physical properties

صدیقه برهانی

- در نظر گرفتن مواد و پدیده های مختلف و مطالعه خواص فیزیکی آنها منجر به ارائه تئوریهای مفیدی و متنوعی شده است.
- از نظر تکنولوژی بدست آوردن روابطی حائز اهمیت است که از نظر ریاضی
  - خصوصیات ماکروسکوپی
  - منحنی تنش-کرنش
  - رفتار برگشت پذیری
  - خزیش
  - افت تنش
  - ....
 را توصیف کند.
- تفکرهای حاکم در تحلیل خواص مکانیکی:
  - Analytical
  - Integral

### منحنی تنش-کرنش الیاف



20.4 Stress-strain curve of rayon.

### مدل میله های فلزی با اتصالات الاستیک

## تأثیر رطوبت بر منحنی تنش-کرنش

- بدلیل اینکه تسلیم توسط ارتعاشات حرارتی تأثیر پذیر است، منحنی تنش-کرنش نیز توسط حرارت تحت تأثیر قرار میگیرد.
- خزش و افت تنش در دماهای بالاتر سریعتر اتفاق می افتد .
- تأثیر جذب رطوبت بیشتر است.
- با افزایش رطوبت نسبی تنش در نقطه تسلیم کاهش می یابد.
- چون در الیاف ویسکوز مرطوب، محدودیتی برای حرکت مناطق غیر بلوری وجود ندارد، ملکولها می توانند در دریای ملکولهای آب شناور باشند و ساختار فقط توسط میسل های بلوری نگه داشته می شود و این دلیل مدول تر پایین ریون هاست.

$$\sigma_0 = \frac{\text{نیروی وارده}}{\text{سطح مقطع اولیه}} = \text{تنش اسمی } (\sigma_0)$$

$$\sigma = \frac{\text{نیروی وارده}}{\text{سطح مقطع جاری (جاری)}} = \text{تنش واقعی } (\sigma)$$

در فرآیند کشش تغییرات حجم ناچیز و کوچک در نظر گرفته می شود.

$$\frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = 1 + e$$

$$Al = A_0 l_0 \Rightarrow \frac{A_0}{A} = \frac{l}{l_0} = 1 + e \Rightarrow A = \frac{A_0}{1 + e}$$

$$f = \sigma A, \text{ at } f_{\max} \Rightarrow \frac{df}{de} = 0 \Rightarrow \sigma \frac{dA}{de} + A \frac{d\sigma}{de} = 0$$

$$A = \frac{A_0}{1 + e} \Rightarrow \frac{dA}{de} = \frac{-A_0}{(1 + e)^2}$$

$$\frac{-\sigma A_0}{(1 + e)^2} + \frac{A_0}{1 + e} \frac{d\sigma}{de} = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{de} = \frac{\sigma}{1 + e} = \sigma_0$$

در شرایط واقعی وقتی نیرو در ماکزیمم مقدار است، تنش در ماکزیمم مقدار نیست.

## وابستگی مدول به دما

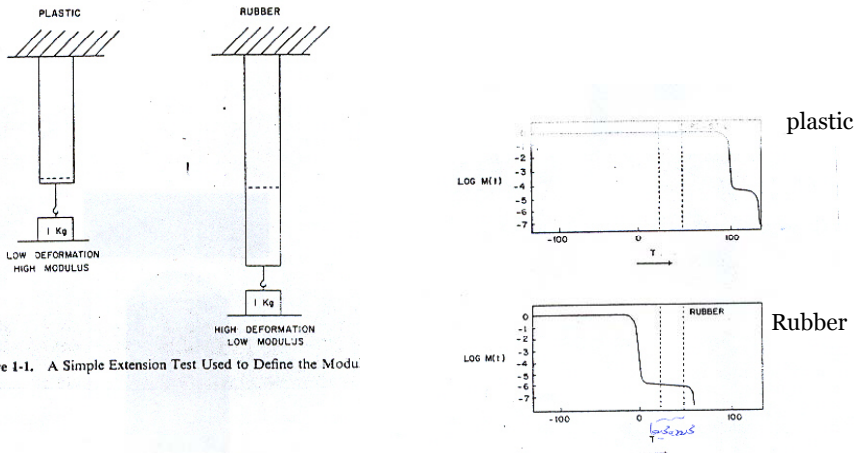


Figure 1-1. A Simple Extension Test Used to Define the Modulus

Figure 1-2. Schematic Modulus-Temperature Curves for a Rubber and a Plastic over a Broad Temperature Range.

## وابستگی مدول به زمان

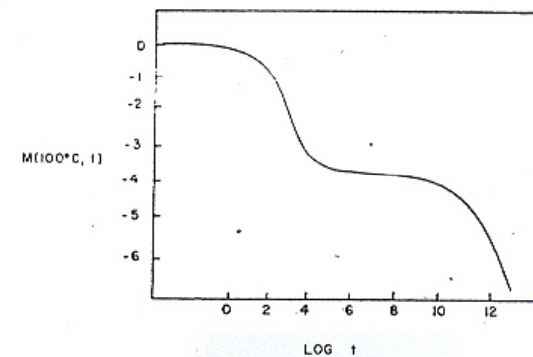


Figure 1-3. Schematic Modulus-Time Curve for a Polymer at Constant Temperature.

$$\text{Tensile Modulus } E = \frac{\text{Tensile Stress}}{\text{Tensile Strain}} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

اندیس 0 به منزله ثابت بودن پارامتر است.  
اندیس s مشخصه برش است.

$$\text{Tensile Compliance } D = \frac{1}{E}$$

$$\text{Shear Modulus } G = \frac{\text{Shear Stress}}{\text{Shear Strain}} = \frac{\sigma_s}{\gamma}$$

$$\text{Shear Compliance } J = \frac{1}{G}$$

$\mu$  = ضریب پواسون  
V = حجم لیف

$$\text{Shear Modulus } G = 2(1 + \mu)E \quad \mu = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{V} \right) \frac{dV}{d\varepsilon} \right)$$

با فرض ناچیز بودن تغییرات حجم:

$$E = 3.G$$

$$\text{Shear Creep Compliance } J(t) = \frac{\gamma(t)}{\sigma_{s,0}}$$

$$\text{Tensile Creep Compliance } D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$$

$$\text{Tensile Relaxation Modulus } E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Shear Relaxation Modulus } G(t) = \frac{\sigma_s(t)}{\gamma_0}$$

## آزمایشهای زود گذر Transient Experiments

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0, \sigma_0, \varepsilon(t)$$

خزش Creep

افت تنش Stress Relaxation

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \varepsilon_0, \sigma(t)$$

نتیجه دو آزمایش فوق بیانگر تنش های مختلف است و نشان داده میشود که روش آزمایش بر نتایج اثر گذار است.

## طبقه بندی آزمایشهای کششی

- [ CRL (در مدت 20-30 ثانیه انجام میشوند) آزمایشهای شبه استاتیکی هستند .
- [ CRE

- [ Creep (در مدت بیش از 30 ثانیه انجام میشوند) آزمایشهای استاتیکی هستند
- [ Relaxation

- دسته دیگری از آزمایشها تحت تنش دوره ای قرار میگیرند و آزمایشهای دینامیکی هستند. این آزمایشها در زمانی کمتر از 1 ثانیه انجام می شوند.

## تقسیم بندی مواد

• الاستیک غیر خطی  $\sigma = f(\varepsilon)$

• الاستیک خطی  $\sigma = E\varepsilon$

• الاستیک خطی نامتجانس

• ویسکوز خطی  $\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$

• ویسکوز غیر خطی  $\sigma = f\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$

• ویسکوالاستیک خطی  $\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$

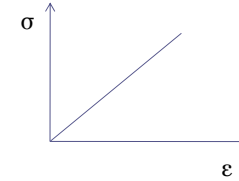
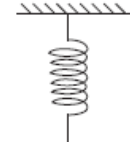
$$\text{Conventional Stress } (f) = \frac{F}{A}$$

$$\text{Specific Stress } (\sigma) = \frac{F}{\mu} \Rightarrow f = \sigma \rho$$

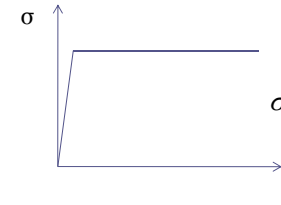
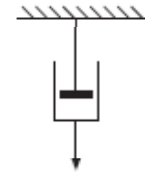
$$\mu = \rho \cdot A$$

رفتار مکانیکی الیاف ویسکو الاستیک است

- برای تحلیل این رفتار از مدل‌های ارائه شده استفاده میشود.
- فنر برای بیان رفتار الاستیک



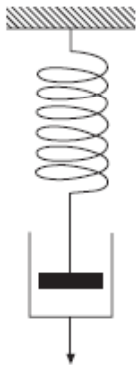
$$\sigma = E \varepsilon$$



◦ کمک فنر برای رفتار ویسکوز

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

### مدل ماکسول Maxwell Model



$$\sigma = \sigma_D = \sigma_S$$

$$\varepsilon = \varepsilon_D + \varepsilon_S$$

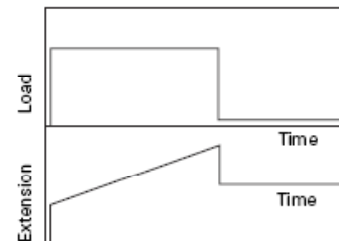
$$\sigma_S = E \varepsilon_S, \quad \sigma_D = \eta \frac{d\varepsilon_D}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

- Creep:  $\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}$

$$\Rightarrow \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon(t)} d\varepsilon = \int_0^t \frac{\sigma}{\eta} dt \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{\eta} t$$

$$\text{Divided by } \sigma_0 \rightarrow \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} + \frac{t}{\eta}, \quad D = \frac{1}{E} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}$$



$$D(t) = D + \frac{t}{\eta}$$

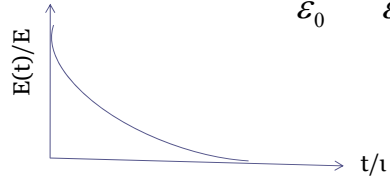
این مدل برای خزش مناسب نیست چون رفتار واقعی پلیمرها متفاوت از نمودار حاصله است. (تغییرات ازدیاد طول خطی نیست)

• Stress Relaxation:  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\eta} \Rightarrow \frac{1}{\sigma} d\sigma = -\frac{E}{\eta} dt \Rightarrow \int_{\sigma_0}^{\sigma(t)} \frac{1}{\sigma} d\sigma = \int_0^t -\frac{E}{\eta} dt$$

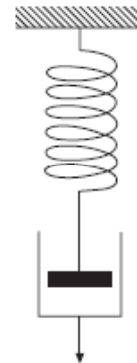
$$\Rightarrow \ln \frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = -\frac{E}{\eta} t \quad \tau = \frac{\eta}{E} \Rightarrow \sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

divided by  $\varepsilon_0 \Rightarrow \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad E(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$



منحنی مدول-زمان اجسام ویسکوالاستیک شکل متفاوتی را نشان میدهند، لذا این مدل قادر به توجیه رفتار ویسکوالاستیک الیاف نیست.

### ارتباط تنش-کرنش در مدل ماکسول



$$\sigma = \sigma_D = \sigma_S \quad \varepsilon = \varepsilon_D + \varepsilon_S$$

for CRE Method:  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_S}{dt} + \frac{d\varepsilon_D}{dt} = k$

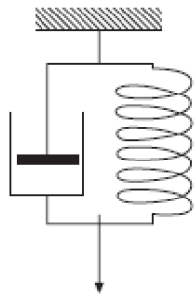
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = k \Rightarrow \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = k - \frac{\sigma}{\eta} = \frac{k\eta - \sigma}{\eta}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{E}{\eta} (k\eta - \sigma) \Rightarrow \frac{d\sigma}{k\eta - \sigma} = \frac{E}{\eta} dt$$

$$\int_0^{\sigma(t)} \frac{d\sigma}{k\eta - \sigma} = \int_0^t \frac{E}{\eta} dt \Rightarrow \ln \frac{k\eta}{k\eta - \sigma(t)} = \frac{E}{\eta} t \Rightarrow \ln \frac{k\eta - \sigma(t)}{k\eta} = -\frac{E}{\eta} t$$

$$\sigma(t) = k\eta [1 - \exp(-t E/\eta)] \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = k \Rightarrow \varepsilon = k't \Rightarrow \sigma(t) = k\eta [1 - \exp(-\varepsilon E/\eta k')]$$

### مدل ویت Voite Model



$$\varepsilon = \varepsilon_S = \varepsilon_D$$

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_D$$

$$\sigma_S = E\varepsilon_S, \quad \sigma_D = \eta \frac{d\varepsilon_D}{dt}$$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)E + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \tau = \frac{\eta}{E} \text{ retardation time}$$

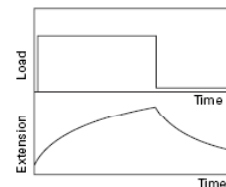
Creep:  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{\sigma_0 - E\varepsilon(t)} \times -E \Rightarrow \frac{-E}{\eta} dt = -E \frac{d\varepsilon(t)}{\sigma_0 - E\varepsilon(t)}$

$$\int_0^t \frac{dt}{\tau} = \int_0^{\varepsilon(t)} -E \frac{d\varepsilon(t)}{\sigma_0 - E\varepsilon(t)} \Rightarrow \frac{t}{\tau} = \ln \frac{\sigma_0 - E\varepsilon(t)}{\sigma_0}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} (1 - e^{-t/\tau}) \quad D(t) = D(1 - e^{-t/\tau})$$

Stress Relaxation:  $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \sigma(t) = \varepsilon(t)E \Rightarrow \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = E$

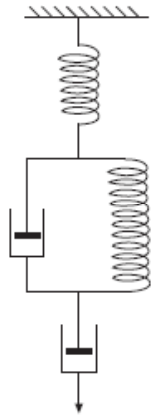
$$E(t) = E$$



20.47 Spring and dashpot in parallel.

این مدل نیز نمی تواند جوابگوی پدیده افت تنش باشد چون نیروی بینهایت برای کرنش آنی بخش ویسکوز لازم است

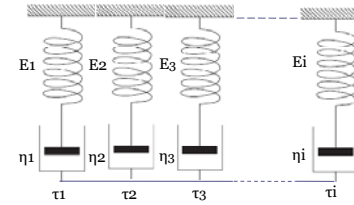
## مدل چهار جزئی



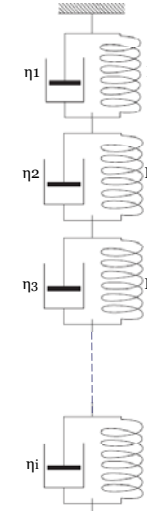
20.48 Four-element model.

- این مدل بطور کیفی ویژگیهای: از دیاد طول آنی - خزش اولیه - خزش ثانویه و افت تنش را بخوبی نشان میدهد.
- برای نمایش کاملی از رفتار الیاف، نه فقط نشان دادن چهار اثر فوق لازم است بلکه خصوصیات دینامیکی که با فرکانس تغییر می کند و روابط غیر خطی بین ازدیاد طول، نیرو و زمان نیز نیاز به بررسی دارد.
- استفاده از فنر و کمک فنر راهی برای نمایش رفتار ویسکوالاستیک خطی است که تغییرات را به فرم ریاضی بیان میکند.
- در تمام مدلهایی که از فنر و کمک فنر استفاده شده است هر شکلی از تغییر با زمان را نشان میدهند اما به نمایش وابستگی خطی تنش و کرنش محدود است.
- در این مدلها اگر تنش دو برابر شود کرنش هم دو برابر خواهد شد.

## Maxwell-Weichert Model

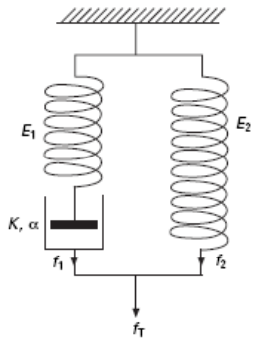


## Voit-Kelvin Model



## مدل سه جزئی آیرینگ Eyring's three elements model

- در این مدل بجای اضافه کردن تعداد و پیچیده کردن آرایش اجزاء، خصوصیات اجزاء اصلاح شده است.



20.49 Eyring's three-clement model.

- فنر از قانون هوک پیروی میکند ولی کمک فنر رفتار ویسکوز غیر نیوتنی را نشان میدهد. یعنی:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = K \sinh \alpha f$$

- یعنی در بخش ویسکوز با افزایش تنش، نرخ کرنش خیلی سریعتر افزایش پیدا خواهد کرد.

- فرض:
- کرنش در نتیجه سرخوردن واحدهایی (flow-units) اتفاق می افتد که این واحدها ممکن است:
  - ملکولها
  - قسمتی از ملکولها
  - گروهی از قسمتی از ملکولها باشند.

- سرخوردن واحدها روی یکدیگر منجر به تغییر از یک حالت تعادل به حالت تعادلی جدید می شود.

- در این حالت واحدها بر سد انرژی پتانسیل غلبه خواهند کرد.

•  $\Delta F$  = انرژی آزاد اکتیواسیون در غیاب تنش  
تعداد حرکت در ثانیه برابر است با:

$$\text{number of moves} = \nu e^{-\Delta F/kT}$$

per second

$\nu$  فرکانس ارتعاشات حرارتی طبیعی  $\approx 10^{13}$  Hz

$k$  ثابت بولتزمن

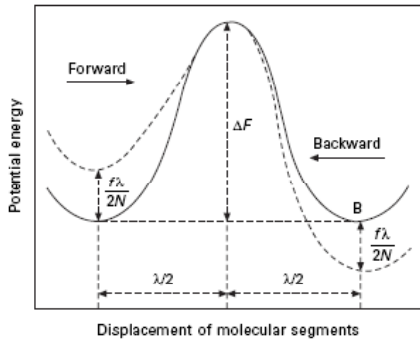
در غیاب تنش تعداد حرکات در جهات مختلف در واحد زمان مساوی است.

$f$  تنش اعمالی بر روی  $N$  ملکول در واحد سطح مقطع

لذا  $f/N$  متوسط تنش وارد بر هر واحد است.

کار لازم برای عبور از سد انرژی:

$$W = \frac{f}{N} \cdot \frac{\lambda}{2}$$



20.50 Potential-energy barrier for flow.

net number of forward moves per second

= number of forward moves - number of backward moves

$$= \nu \cdot e^{-\frac{(\Delta F - f\lambda/2N)}{kT}} - \nu \cdot e^{-\frac{(\Delta F + f\lambda/2N)}{kT}}$$

$$= \nu \cdot e^{-\Delta F/kT} \left( e^{f\lambda/2kNT} - e^{-f\lambda/2kNT} \right)$$

$$= 2 \cdot \nu \cdot e^{-\Delta F/kT} \sinh \frac{f \cdot \lambda}{2NkT}$$

$V$  = سرعت جریان

$\lambda_1$  = میانگین فاصله بین واحدهای مجاور

$$\text{rate of strain} = \frac{d\varepsilon}{dt} = V / \lambda_1$$

$$= 2 \frac{\lambda}{\lambda_1} \nu \cdot e^{-\Delta F/kT} \sinh \frac{f \cdot \lambda}{2NkT}$$

$$K = 2 \frac{\lambda}{\lambda_1} \nu \cdot e^{-\Delta F/kT}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{2NkT}$$



$$\frac{d\varepsilon}{dt} = K \sinh \alpha \cdot f$$

• علاوه بر جابجایی واحدها نسبت به همدیگر، با توجه به تغییر شکل الاستیک ساختار، ازدیاد طول اولیه هم وجود خواهد داشت.

تجزیه و تحلیل جزئیات تغییرات مدل:

- فنر سمت چپ نشان دهنده ازدیاد طول الاستیک ملکولها بدلیل سیالیت
- فنر سمت راست نشان دهنده تغییر شکل الاستیک ملکولها در شبکه بدون ارتباط با جریان ویسکوز
- کمک فنر جریان بخش هایی از زنجیر ملکولی را نسبت به هم نشان میدهد

$$\text{strain} = \varepsilon = \frac{f}{E}$$

ارتباط تنش- کرنش و زمان در مدل آیرینگ

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left( \frac{1}{E} \right) \frac{df}{dt}$$

If  $E_1$  is the modulus of the left-hand spring and  $f_1$  is the stress in the left-hand arm of the model, then we have:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{df_1}{dt} + K \sinh \alpha f_1$$

For the right-hand arm, with a spring of modulus  $E_2$ , and a stress  $f_2$ , we have

$$\varepsilon = \frac{f_2}{E_2}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{df_2}{dt}$$

The total stress,  $f_T$ , is given by:

$$f_T = f_1 + f_2$$

$$\frac{df_T}{dt} = \frac{df_1}{dt} + \frac{df_2}{dt}$$

Eliminating  $f_1$  and  $f_2$  from these equations, we get:

$$\frac{d}{dt} [(E_1 + E_2) \varepsilon - f_T] = E_1 K \sinh \alpha (f_T - E_2 \varepsilon)$$

این معادله دیفرانسیل رابطه بین تنش، کرنش و زمان را برای مدل سه جزئی آیرینگ میدهد. این معادله میتواند برای تغییر شکل الیافی که تحت نیرویی در گذشته قرار گرفته است استفاده شود، مانند افت تنش، خزش و رفتار تنش- کرنش

For stress relaxation, with  $\epsilon = \epsilon_c = \text{constant}$  and  $d\epsilon/dt = 0$ ,

$$\frac{d}{dt}[(E_1 + E_2)\epsilon - f_T] = E_1 K \sinh \alpha (f_T - E_2 \epsilon)$$

$$\frac{df_T}{dt} = -E_1 K \sinh \alpha (f_T - E_2 \epsilon_c)$$

On integration, this gives:

$$\frac{\tanh \{ \alpha (f_T - f_\infty) / 2 \}}{\tanh \{ \alpha (f_0 - f_\infty) / 2 \}} = e^{-\alpha E_1 K t}$$

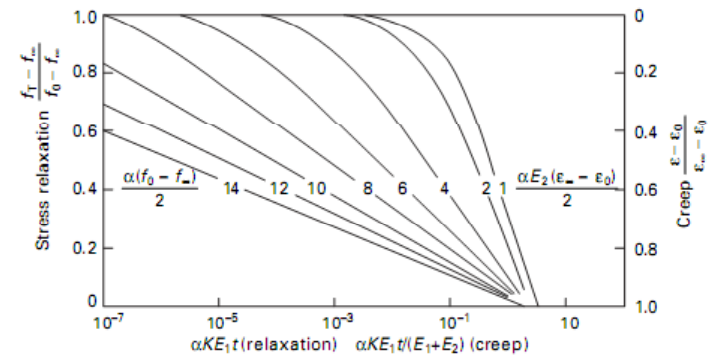
where  $f_0 = (E_1 + E_2) \epsilon_c = \text{initial stress at } t = 0$ , and  $f_\infty = E_2 \epsilon_c = \text{final stress at } t = \infty$ .

For creep, we have stress  $= f_T = \text{constant} = f_c$ , and  $df_T/dt = 0$ ,

$$(E_1 + E_2) d\epsilon/dt = E_1 K \sinh \alpha (f_c - E_2 \epsilon)$$

On integration this gives:

$$\frac{\tanh [ \alpha E_2 (\epsilon_\infty - \epsilon) / 2 ]}{\tanh [ \alpha E_2 (\epsilon_\infty - \epsilon_0) / 2 ]} = e^{-\alpha E_1 K t / (E_1 + E_2)}$$



20.51 Graphs of equations (20.44) and (20.47) for stress relaxation and creep [61].

## منحنی تنش-کرنش در مدل سه جزئی آیرینگ

$$\frac{d}{dt}[(E_1 + E_2)\epsilon - f_T] = E_1 K \sinh \alpha (f_T - E_2 \epsilon)$$

For constant rate of extension, we have  $d\epsilon/dt = \text{constant}$ ,

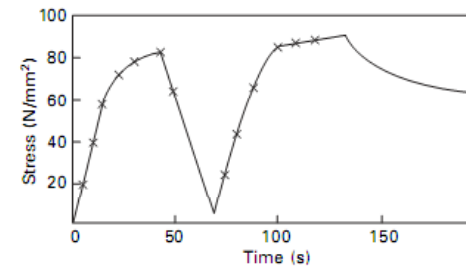
$$\frac{df_T}{dt} = (E_1 + E_2) \frac{d\epsilon}{dt} - E_1 K \sinh \alpha (f_T - E_2 \epsilon)$$

On integration, this gives:

$$f_T = E_2 \epsilon + \frac{1}{\alpha} \log_e \left\{ \beta + S \tanh \left[ \frac{\alpha K S t}{2} + \tanh^{-1} \frac{(1 - \beta)}{S} \right] \right\}$$

where  $\beta = (d\epsilon/dt)/K$  and  $S^2 = 1 + \beta^2$ .

- روشهای فیت کردن این معادله با نتایج تجربی و تعیین  $\beta$  توسط محققان توصیف شده است.



20.53 Application of Eyring's three element model to the stress-strain relations of acetate at 57% r.h. and 27 °C. The full curve gives the experimental results, and the crosses are calculated from Eyring's theory with parameters derived from the first loading curve. After Reichardt and Eyring [71].



## آزمایشهای دینامیکی

- در آزمایشهای معمولی (استاتیکی یا شبه استاتیکی) اگرچه زمان تأثیر نیرو بر نتایج آزمایش موثر بود ولی رابطه تنش-کرنش بدون توجه به حرکت بررسی شد.
- در آزمایشهای دینامیکی حرکت نیز در نظر گرفته می شود.

• وقتی از اینرسی نمونه نتوان صرفنظر کرد، تنش و ازدیاد طول در طول نمونه متغیر خواهد بود.

• وقتی تنشی به انتهای نمونه اعمال شود زمانی برای انتقال نیرو و از بین رفتن نوسان نیرو لازم است.

• فرض کنید در زمان  $t=0$  کرنش سینوسی به لیف اعمال شود:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t \quad t > 0, \quad \omega = 2\pi f$$

(کرنش =  $\varepsilon m$  ماکزیمم دامنه نوسان کرنش)  
 =  $\varepsilon$  کرنش در زمان  $t$   
 $\omega$  = فرکانس زاویه ای (رادیان بر ثانیه)  
 $f$  = فرکانس (سیکل بر ثانیه)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_m 2\pi \cdot f \cdot \cos 2\pi \cdot f \cdot t \quad \text{strain rate}$$

در لحظه  $t=0$  میزان کرنش صفر و میزان تغییرات کرنش ماکزیمم است:

$$t = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_m 2\pi \cdot f$$

$$t = \frac{1}{f} \Rightarrow \varepsilon = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_m 2\pi \cdot f$$

$$t = \frac{1}{4f} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_m, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$$

وقتی کرنش در ماکزیمم مقدار خود است، نرخ کرنش صفر خواهد بود.

کرنش و نرخ کرنش دارای اختلاف فاز 90 درجه هستند.

• برای مدل ویت :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \varepsilon = \varepsilon_m \sin 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_m \sin 2\pi \cdot f \cdot t + \eta \cdot \varepsilon_m 2\pi \cdot f \cdot \cos 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$\sigma = \varepsilon_m \left[ E^2 + 4\pi^2 \eta^2 f^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{E}{\left[ E^2 + 4\pi^2 \eta^2 f^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \sin 2\pi \cdot f \cdot t + \frac{2\eta \pi \cdot f}{\left[ E^2 + 4\pi^2 \eta^2 f^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \cos 2\pi \cdot f \cdot t \right]$$

$$\left[ E^2 + 4\pi^2 \eta^2 f^2 \right]^{\frac{1}{2}} = E^*$$

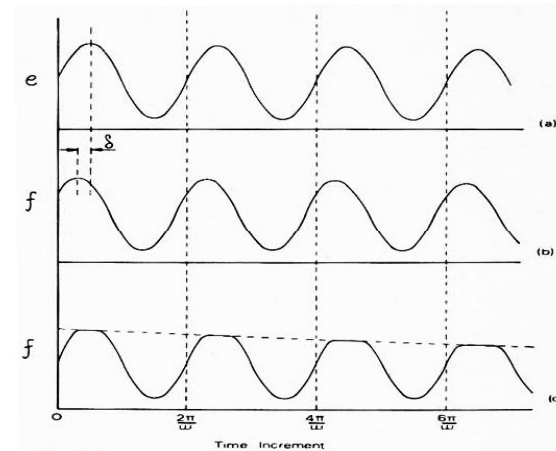
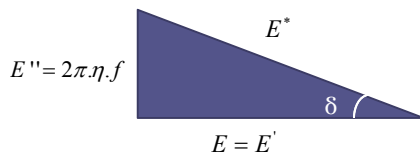
$$\tan \delta = \frac{2\pi \eta \cdot f}{E}$$

$$\sin \delta = \frac{2\pi \eta \cdot f}{E^*}$$

$$\cos \delta = \frac{E}{E^*}$$

$$\sigma = \varepsilon_m E^* (\cos \delta \sin 2\pi \cdot f \cdot t + \sin \delta \cdot \cos 2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$\sigma = \varepsilon_m E^* \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \delta)$$



- (a) تغییر طول سینوسی اعمال شده
- (b) تغییرات تنش برای مواد با خاصیت ویسکوالاستیک خطی
- (c) تغییر تنش برای اجسام ویسکوالاستیک غیر خطی در محدوده زمانی بلند

$E^*$  = Complex Modulus

$E'$  = Elastic Modulus

$$\sigma_m = \varepsilon_m E^* = \varepsilon_m [E^2 + 4\pi^2 \eta^2 f^2]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_m [E'^2 + E''^2]^{\frac{1}{2}}$$

مدول بخش الاستیک =  $E'$

مدول بخش ویسکوز =  $E''$

$$\sigma = \sigma_m \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \delta)$$

$$\sigma = \sigma_m (\sin(2\pi \cdot f \cdot t) \cos \delta + \cos(2\pi \cdot f \cdot t) \sin \delta)$$

$$E_m = \text{Modulus} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m}$$

$$\sigma = \sigma_m (\sin(2\pi \cdot f \cdot t) \cos \delta + \cos(2\pi \cdot f \cdot t) \sin \delta)$$

$$E_m = \text{Modulus} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m}$$

$$\text{Dynamic Modulus} = \frac{\text{in phase stress amplitude}}{\text{strain amplitude}} = \frac{\sigma_m \cos \delta}{\varepsilon_m} = E_m \cos \delta = E$$

اگر  $E = E_m \leftarrow \delta = 0$

اگر  $E = 0 \leftarrow \delta = 90$

$$\text{loss factor} = \text{dissipation factor} = \frac{\text{out phase stress amplitude}}{\text{in phase stress amplitude}} = \frac{\sigma_m \sin \delta}{\sigma_m \cos \delta} = \tan \delta$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_m \sin 2\pi \cdot f \cdot t + \eta \cdot \varepsilon_m 2\pi \cdot f \cdot \cos 2\pi \cdot f \cdot t$$

در حالت کاملاً الاستیک:

$$\eta = 0 \Rightarrow E'' = 2\pi \cdot f \cdot \eta = 0$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_m \sin 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$$

$$\sigma = E \varepsilon$$

کار انجام شده  
(کاری که در اثر اعمال تنش ماکزیمم انجام میشود تا کرنش به ماکزیمم مقدار برسد:

$$F = \sigma \cdot A = E \cdot \varepsilon \cdot A$$

$$W = \int_0^{\varepsilon} F dl$$

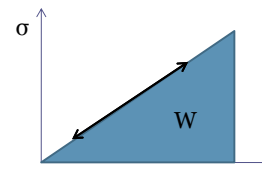
$$W = \int_0^{\varepsilon_m} E \cdot \varepsilon \cdot A \cdot l_0 d\varepsilon = E \cdot A \cdot l_0 \int_0^{\varepsilon_m} \varepsilon d\varepsilon = E \cdot A \cdot l_0 \left[ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right]_0^{\varepsilon_m}$$

$$W = \frac{1}{2} E \cdot A \cdot l_0 \varepsilon_m^2$$

$$\frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = 1 + \varepsilon \Rightarrow l = l_0 \varepsilon + l_0$$

کار در واحد حجم:

$$W = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon_m^2$$



$$W = \text{سطح زیر منحنی} = \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m = \frac{1}{2} E \varepsilon_m^2, \quad \sigma_m = E \varepsilon_m$$

در حالت پلاستیک کامل:

$$E = E' = 0$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_m \sin 2\pi \cdot f \cdot t + \eta \cdot \varepsilon_m \cdot 2\pi \cdot f \cdot \cos 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$\sigma = \eta \cdot \varepsilon_m \cdot 2\pi \cdot f \cdot \cos 2\pi \cdot f \cdot t \quad \varepsilon = E \cdot \varepsilon_m \sin 2\pi \cdot f \cdot t$$

بین تنش و کرنش اختلاف فاز 90 درجه وجود دارد.

$$\sigma^2 + \varepsilon^2 = 4\varepsilon_m^2 \eta^2 \pi^2 f^2 \cos^2 2\pi \cdot f \cdot t + \varepsilon_m^2 \sin^2 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$\sigma_m = \varepsilon_m \left[ 4\pi^2 \eta^2 f^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 4\pi^2 \eta^2 f^2 = \left( \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} \right)^2$$

$$\sigma^2 + \varepsilon^2 = \sigma_m^2 \cos 2\pi \cdot f \cdot t + \varepsilon_m^2 \sin^2 2\pi \cdot f \cdot t$$

$$t = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \sigma^2 + \varepsilon^2 = \sigma_m^2$$

اتلاف انرژی در یک سیکل:  
اتلاف انرژی در یک سیکل ، دایره ای با شعاع  $\sigma_m$  خواهد بود.

• کار برابر با سطح زیر منحنی است:

$$W = \pi \cdot R^2 \rightarrow W = \pi \cdot \sigma_m^2$$

$$R = \sigma_m \rightarrow \sigma_m = \varepsilon_m \cdot 2\pi \cdot \eta \cdot f \rightarrow W = 4 \cdot \pi^3 \cdot \varepsilon_m^2 \cdot \eta^2 \cdot f^2$$

در حالت پلاستیک کامل، اتلاف انرژی زیاد است و میزان اتلاف انرژی به خاصیت ویسکوزی ( $\eta$ ) جسم بستگی دارد.

در حالت ویسکوالاستیک:

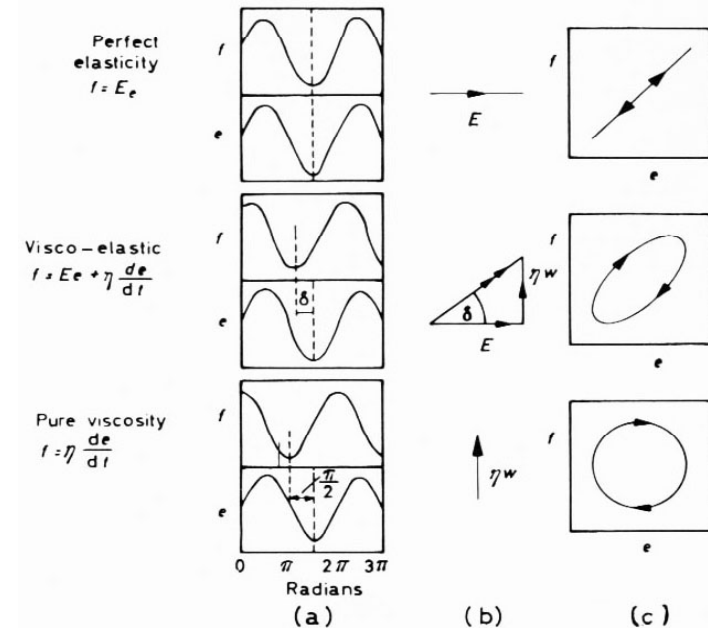
$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\sigma_m = \varepsilon_m E^* = \varepsilon_m \left[ E^2 + 4\eta^2 \pi^2 f^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_m \left[ E'^2 + E''^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma_m^2 \frac{4\pi^2 \eta \cdot f}{\left[ E^2 + 4\pi^2 \eta^2 f^2 \right]} = \frac{1}{2} \sigma_m^2 \frac{2\pi \cdot E''}{E'^2 + E''^2} \rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_m^2 \cdot 2\pi \cdot E'' = \varepsilon_m^2 \cdot \pi \cdot E'' = \pi \varepsilon_m \sigma_m$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{\left[ E^2 + 4\pi^2 \eta^2 f^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$



برای بسط ریاضی، کاربرد اعداد مرکب مناسب است.

$$i = \sqrt{-1}$$

با توجه به اینکه:

لذا می توان نوشت:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_m e^{i.\omega.t} = \varepsilon_m (\cos \omega.t + i.\sin \omega.t)$$

$$E^* = E' + i.E''$$

$E'$  = مدول حقیقی

$E''$  = مدول موهومی (مجازی)

$$\sigma^* = E^* \varepsilon^* = E^* \varepsilon_m e^{i.\omega.t} = (E' + i.E'') \varepsilon_m (\cos \omega.t + i.\sin \omega.t)$$

$$\sigma^* = \varepsilon_m (E' \cos \omega.t - E'' \sin \omega.t) + i \varepsilon_m (E' \sin \omega.t + E'' \cos \omega.t)$$

$$\sigma = E \varepsilon_m \sin 2\pi.f.t + \eta \varepsilon_m 2\pi.f \cos 2\pi.f.t$$

مزیت: تجزیه وتحلیل پارامترها بصورت برداری یا اعداد مرکب